*Atti Accademia Peloritana dei Pericolanti*
*Classe I di Scienze Fis. Mat. e Nat.*
*Vol. LXXIII (1995) - Adunanza del 20 ottobre 1995*

# ALGEBRE DI TIPO LINEARE DI MODULI FINITAMENTE GENERATI

ROSANNA UTANO(*)

Riassunto

Si studiano l'algebra simmetrica e l'algebra di Rees di un modulo $E$ finitamente generato su un anello $R$ commutativo, noetheriano, con identità. Si mostra che è opportuno considerare, piuttosto che l'algebra di Rees di $E$, un'algebra di tipo lineare $\mathfrak{R}(E)$ che, nel caso in cui $E = \mathfrak{I}$ ideale fedele di $R$, coincide con l'algebra di Rees di $\mathfrak{I}$. Si cercano legami tra l'omomorfismo degradante per l'algebra simmetrica di $E$ e l'omomorfismo canonico tra l'algebra simmetrica di $E$ e l'algebra $\mathfrak{R}(E)$.

## Introduzione.

Sia $R$ un anello commutativo noetheriano con identità e sia $E$ un modulo finitamente generato su $R$.

Denotiamo con $\mathrm{Sym}_R(E)$, o semplicemente $S(E)$, l'algebra simmetrica di $E$ su $R$:

$$S(E) = \bigoplus_{t \geq 0} \mathrm{Sym}_t(E).$$

(*) Lavoro eseguito con il contributo del M.P.I. (fondi 40%).

È noto che se $R$ è un dominio d'integrità, $S(E)$ non è sempre un dominio d'integrità.

Si ha: $S(E)$ è dominio d'integrità se e solo se ogni potenza simmetrica $\mathrm{Sym}_t(E)$ è un $R$-modulo privo di torsione.

Se indichiamo con $(\mathrm{Sym}_t(E))_0$ il sottomodulo di torsione di $\mathrm{Sym}_t(E)$, l'algebra

$$B(E) = \bigoplus_{t \geq 0} \mathrm{Sym}_t(E)/(\mathrm{Sym}_t(E))_0,$$

che diciamo algebra di Rees del modulo $E$, è un dominio di integrità.

Anche se $R$ non è un dominio, $B(E)$ risulta essere priva di torsione.

Se $E = \mathfrak{I}$ =ideale fedele di $R$, allora

$$B(E) = B(\mathfrak{I}) = \bigoplus_{t \geq 0} \mathfrak{I}^t = R[\mathfrak{I}T],$$

per qualche indeterminata $T$, è l'algebra di Rees di $\mathfrak{I}$.

Nella costruzione di $B(E)$ possiamo sostituire $E$ con $E/E_0$, dove $E_0$ indica il sottomodulo di torsione di $E$; dunque possiamo supporre che $E$ sia un $R$-modulo privo di torsione.

Mostreremo che è opportuno considerare, piuttosto che l'algebra di Rees di $E$, un'algebra di tipo lineare $\mathfrak{R}(E)$ che, nel caso in cui $E = \mathfrak{I}$ ideale fedele di $R$, coincide con l'algebra di Rees di $\mathfrak{I}$.

L'algebra simmetrica $\mathrm{Sym}_R(E)$ e l'algebra $\mathfrak{R}(E)$ sono legate da un epimorfismo canonico

$$\mathrm{Sym}_R(E) \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{R}(E) \to 0.$$

Una condizione necessaria e sufficiente affinché $\alpha$ sia un isomorfismo è data in [8] in termini dei moduli di omologia del complesso di Koszul associato alla successione delle forme lineari che generano l'ideale irrilevante di $\mathfrak{R}(E)$.

Nel N. 1 richiamiamo alcune definizioni e risultati noti riguardanti il caso in cui $E$ è un ideale $\mathfrak{I}$ di $R$.

Nel N. 2 definiamo l'omomorfismo degradante

$$\lambda_t : \mathrm{Sym}_{t+1}(E) \to \mathrm{Sym}_t(E) \quad \forall t.$$

Successivamente cerchiamo legami tra l'omomorfismo degradante per l'algebra simmetrica di $E$ e l'omomorfismo canonico tra l'algebra simmetrica di $E$ e l'algebra $\mathfrak{R}(E)$.

## 1. Generalità relative al caso $E = \mathfrak{I}$.

Sia $\mathfrak{I} = (\mathbf{x}) = (x_1, ..., x_n)$ un ideale in un anello commutativo noetheriano $R$ con identità.

L'applicazione $R^n \to \mathfrak{I}$ così definita:

$$(b_1, ..., b_n) \to \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$

induce un epimorfismo di $R$-algebre

$$\gamma : R[e_1, ..., e_n] \to \mathrm{Sym}(\mathfrak{I})$$

avente nucleo generato dalle forme lineari $\sum_{i=1}^{n} b_i e_i$ tali che

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 0.$$

L'algebra di Rees di $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{I})$, è il sottoanello di $R[T]$, $R[x_1 T, ..., x_n T]$, generato da $\mathbf{x}T$.

Si può definire l'applicazione

$$\beta : R[e_1, \ldots, e_n] \to \mathfrak{R}(\mathfrak{I})$$

mediante $e_i \to x_i T$; inoltre il nucleo di tale applicazione è generato da tutte le forme $F(e_1, ..., e_n)$ tali che $F(x_1, ..., x_n) = 0$.

Per la proprietà universale dell'algebra simmetrica, $\beta$ fattorizza attraverso $\mathrm{Sym}(\Im)$ e si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} R[e_1, \ldots, e_n] & \xrightarrow{\beta} & \Re(\Im) \\ \gamma \downarrow & \nearrow \alpha & \\ \mathrm{Sym}(\Im) & & \end{array}$$

in cui $\alpha$ è un epimorfismo.

Ricordiamo come è definito l'omomorfismo degradante

$$\lambda_t : \mathrm{Sym}_{t+1}(\Im) \to \mathrm{Sym}_t(\Im).$$

Sia $x \in \mathrm{Sym}_{t+1}(\Im)$, ad esempio sia $x = F(a_1, ..., a_n) := F(\mathbf{a})$ con $F \in S_{t+1}(R^n)$.

Possiamo scrivere

$$F = e_1 F_1 + ... + e_n F_n, \quad F_i \in S_t(R^n).$$

Allora definiamo:

$$\lambda_t(x) := x_1 F_1(\mathbf{a}) + \ldots + x_n F_n(\mathbf{a}) \in \mathrm{Sym}_t(\Im).$$

Si ha:

$$\lambda_t(\mathrm{Sym}_{t+1}(\Im)) = \Im\mathrm{Sym}_t(\Im).$$

La relazione tra l'epimorfismo $\alpha$ e l'omomorfismo degradante $\lambda$ è espressa dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_{t+1}(\Im) & \xrightarrow{\lambda_t} & \mathrm{Sym}_t(\Im) \\ \alpha_{t+1} \downarrow & & \downarrow \alpha_t \\ \Im^{t+1} & \xrightarrow{\phi} & \Im^t \end{array}$$

dove $\phi$ è l'ordinaria inclusione.

Condizioni affinché $\alpha$ sia un isomorfismo sono state studiate in relazione alle proprietà della successione generatrice di $\mathfrak{I}$ o in termini dei complessi di approssimazione $Z(\mathfrak{I})$ ed $M(\mathfrak{I})$, costruiti su un insieme di generatori di $\mathfrak{I}$ ([5], [6]).

Uno dei risultati principali ottenuti è il seguente:

TEOREMA 1. *Siano $\mathfrak{I}$ un ideale di $R$, $Z$ ed $M$ i complessi di approssimazione costruiti su un insieme di generatori di $\mathfrak{I}$. Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

*1) $\lambda$ è iniettivo;*

*2) $\alpha$ è un isomorfismo.*

*Dimonstrazione.* Cf. [6], Theorem 2.3.

**2.**

Siano $R$ un anello commutativo, noetheriano ed $E$ un $R$-modulo finitamente generato.

Se $E$ ha presentazione libera:

$$R^m \to R^n \to E \to 0,$$

sia $Z_1(E)$ il primo modulo di sizigie di $E$. Abbiamo dunque la successione esatta:

$$0 \to Z_1(E) \to R^n \to E \to 0.$$

Passando alle algebre simmetriche, abbiamo:

$$0 \to Z_1(E) \otimes S \to \mathrm{Sym}_R(R^n) = S = R[e_1, \ldots, e_n] \to \mathrm{Sym}_R(E) \to 0$$

pertanto

$$\mathrm{Sym}_R(E) \cong R[e_1, ..., e_n]/Z_1(E)S.$$

Se poniamo:

$$a_1 \equiv e_1 \bmod Z_1(E)S, \dots, a_n \equiv e_n \bmod Z_1(E)S$$

risulta

$$\mathrm{Sym}_R(E) \cong R[a_1, \dots, a_n].$$

Indichiamo con

$$S_+ = \bigoplus_{t>0} \mathrm{Sym}_t(E)$$

l'ideale irrilevante di $\mathrm{Sym}_R(E)$.

Sia

$$Z_i(E) = H_i(S_+; S)_i \otimes S[-i], \quad S[-i] = S_{r-i}$$

l'i-esimo modulo del complesso di approssimazione $Z(E)$.

Precisamente $H_i(S_+; S)_i$ denota la $i$-esima componente graduata dell'omologia $H_i(S_+; S)$ rispetto ad un sistema $\mathbf{a} = (a_1, ..., a_n)$ di generatori lineari di $S_+$.

Risulta chiaramente

$$H_1(S_+; S)_1 = Z_1(E)S.$$

Consideriamo l'algebra

$$B(E) = \mathrm{Sym}_R(E)/(\mathrm{Sym}_R(E))_0$$

dove $(\mathrm{Sym}_t(E))_0$, $\forall t$, è il sottomodulo di torsione di $\mathrm{Sym}_t(E)$.

Risulta:

$$B_0(E) = R, B_1(E) = E/E_0, B_t(E) = \mathrm{Sym}_t(E)/(\mathrm{Sym}_t(E))_0, t > 1,$$

dunque, supponendo che il modulo $E$ sia privo di torsione,

$$B_1(E) \cong E.$$

Le due algebre graduate $B(E)$ e $\mathrm{Sym}(E)$ sono pertanto distinte a partire dalla componente $t \geq 2$.

Poniamo $x_1 = a_1 + (\mathrm{Sym}_R(E))_0, \ldots, x_n = a_n + (\mathrm{Sym}_R(E))_0$.

Poiché in grado 1 si ha:

$$x_1 \equiv a_1, \ldots, x_n \equiv a_n \quad \text{e} \quad E = R\, x_1 + \ldots + R x_n,$$

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ è un sistema di generatori di $E$ su $R$.

Indichiamo con

$$\tilde{S}_+ = S_+ + (\mathrm{Sym}_R(E))_0$$

e consideriamo

$$\mathfrak{R}^*(E) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (\tilde{S}_+)^i = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{R}_i^*(\tilde{S}_+).$$

$\mathfrak{R}^*(E)$ è anch'essa un'algebra graduata su $R$.

Poniamo

$$\mathfrak{R}_i(E) = (\mathfrak{R}_i^*(\tilde{S}_+))_i$$

la $i$-esima parte graduata di $\mathfrak{R}_i^*(\tilde{S}^+)$ e consideriamo l'algebra graduata

$$\mathfrak{R}(E) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathfrak{R}_i(E).$$

Risulta chiaramente

$$\mathfrak{R}_i(E) = B_i(E), \quad \forall i \geq 0.$$

Chiamiamo $\mathfrak{R}(E)$ l'algebra di Rees del modulo $E$.

Se $E = \mathfrak{I}$ =ideale fedele di $R$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{I})$ =algebra di Rees di $\mathfrak{I}$.

Consideriamo l'algebra $\mathfrak{R}(E)$ piuttosto che tutta l'algebra $\mathfrak{R}^*(E)$ poiché in $\mathfrak{R}(E)$ le potenze alte di $\mathrm{Sym}_R(E)$ non sono implicate direttamente nella costruzione.

Le algebre di tipo lineare $\mathrm{Sym}_R(E)$ e $\Re(E)$ sono legate da un omomorfismo canonico.

Infatti, poiché esse coincidono in gradi 0 e 1, dalla proprietà universale di $\mathrm{Sym}_R(E)$, esiste un omomorfismo:

$$\mathrm{Sym}_R(E) \xrightarrow{a} \Re(E) \to 0$$

che in generale non è iniettivo.

Nel caso in cui $E = \Im$ ideale di $R$ l'omomorfismo $\alpha$ è stato studiato in parecchi articoli e sono noti numerosi criteri affinché $\alpha$ sia un isomorfismo.

Se $E$ è un $R$-modulo finitamente generato l'omomorfismo $\alpha$ è stato studiato in [8] in termini dei moduli di omologia del complesso di Koszul associato alla successione delle forme lineari che generano l'ideale irrilevante di $\Re(E)$.

Consideriamo il complesso $K.(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E))$ di Koszul associato alla successione $\mathbf{a}$ in $\mathrm{Sym}_R(E)$. $K.(\mathbf{a}; Sym_R(E))$ è un complesso graduato e risulta

$$K_p(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E))_t = \oplus \mathrm{Sym}_{t-p}(E) e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

dove $e_1, \ldots, e_n$ è una base canonica di $R^n$.

Nella componente $t > 0$ il complesso ha la forma seguente:

$$0 \longrightarrow \overset{n}{\Lambda} R^n \otimes S_t(E) \xrightarrow{\partial} \overset{n-1}{\Lambda} R^n \otimes S_{t-1}(E) \xrightarrow{\partial} \ldots$$

$$\longrightarrow R^n \otimes S_t(E) \xrightarrow{\partial} S_t(E) \to 0$$

dove $S_t(E) = \mathrm{Sym}_t(E)$, con differenziale $\partial$ dato da:

$$\partial(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \otimes f(\mathbf{a})) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{p-j} e_{i_1}$$

$$\wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \otimes a_{i_j} \cdot f(\mathbf{a}),$$

dove $\cdot$ indica il prodotto nell'algebra simmetrica.

$Z_p(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E))$ e $B_p(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E))$ sono rispettivamente

$$\mathrm{Ker}(K_p(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E)) \to K_{p-1}(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E)))$$

e

$$\mathrm{Im}(K_{p+1}(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E)) \to K_p(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E))).$$

In particolare $Z_1(\mathbf{a}; \mathrm{Sym}_R(E)) = Z_1(E)S$.

In maniera analoga introduciamo il complesso $K.(\mathbf{x}; \mathfrak{R}(E))$, che è ancora un complesso graduato, con differenziale $\partial'$ dato da:

$$\partial'(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \otimes g(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{p-j} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \otimes x_{i_j} g(\mathbf{x}).$$

Tale complesso viene indicato con $K.(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E))$. Vale il seguente:

TEOREMA 2. *L'epimorfismo canonico* $\alpha : Sym_R(E) \to \mathfrak{R}(E)$ *è un isomorfismo se e solo se:*

$$Z_1(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E)) \cap (\tilde{S}_+)^k)_k K_1(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E)) = = ((\tilde{S}_+)^{k-1})_{k-1} B_1(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E))$$

*per ogni* $k \geq 1$.

*Dimonstrazione.* Cfr. [8], Theorème 2.

Sia $E$ finitamente generato da $x_1, ..., x_n$ su $R$ e privo di torsione.

Risulta $\mathrm{Sym}(E) \cong R[a_1, ..., a_n]$ con $a_i \equiv e_i \bmod Z_1(E)$ ed $e_1, ..., e_n$ base di $R^n$. L'omomorfismo $\phi : \mathfrak{R}_{t+1}(E) \to \mathfrak{R}_t(E)$ risulta essere l'ordinaria inclusione

$$\phi : ((\tilde{S}_+)^{t+1})_{t+1} \to ((\tilde{S}_+)^t)_t.$$

Definiamo l'omomorfismo degradante

$$\lambda_t : \mathrm{Sym}_{t+1}(E) \to \mathrm{Sym}_t(E).$$

Sia $x \in \mathrm{Sym}_{t+1}(E)$, ad esempio sia $x = F(a_1, ..., a_n) := F(\mathbf{a})$ con $F \in S_{t+1}(R^n)$.

Poiché $F = e_1 F_1 + ... + e_n F_n$, $F_i \in S_t(R^n)$, poniamo:

$$\lambda_t(x) := x_1 F_1(\mathbf{a}) + \ldots + x_n F_n(\mathbf{a}) \in \mathrm{Sym}_t(E).$$

Noi proviamo il seguente:

TEOREMA 3. *Sia $E$ un $R$-modulo finitamente generato privo di torsione. Sia $\lambda_t : Sym_{t+1}(E) \to Sym_t(E)$, $\forall t$, l'omomorfismo degradante per $Sym_R(E)$ ed $\alpha$ l'epimorfismo canonico tra $Sym_R(E)$ ed $\mathfrak{R}(E)$.*

*Allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

*i)* $\lambda$ *è iniettivo.*

*ii)* $\alpha$ *è isomorfismo.*

*iii)* $Z_1(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E)) \cap (\tilde{S}_+)^k)_k K_1(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E)) = ((\tilde{S}_+)^{k-1})_{k-1} B_1(\tilde{S}_+; \mathfrak{R}(E))$ *per ogni* $k \geq 1$.

*Dimonstrazione.* L'equivalenza ii)$\Leftrightarrow$iii) è provata nel teorema 2.

Per provare l'equivalenza i)$\Leftrightarrow$ii) consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_{t+1}(E) & \xrightarrow{\lambda_t} & \mathrm{Sym}_t(E) \\ \alpha_{t+1} \downarrow & & \downarrow \alpha_t \\ \mathfrak{R}_{t+1}(E) & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{R}_t(E) \end{array}$$

Poichè $\alpha_1$ e $\phi$ sono iniettivi, una facile induzione mostra che $\alpha_t$ è iniettivo $\Leftrightarrow$ $\lambda_t$ è iniettivo.

*Osservazione* 1. Per $E = \Im$ si ha il risultato del teorema 2.

*Osservazione* 2. Se $E$ è un modulo finitamente generato, non necessariamente di presentazione finita, non è sempre possibile definire l'omomorfismo degradante per $\mathrm{Sym}_R(E)$.

Sia $E = Rf$, con $E^* = \mathrm{Hom}(E, R) \neq \{0$ =applicazione nulla$\}$, allora è possibile definire l'omomorfismo degradante per $\mathrm{Sym}_R(E)$.

Sia $\phi : E \to R$, $\phi(f) = \mu \neq 0$. Sia $x \in S_{t+1}(E)$, $x = fF$, $F = eF_1$, con $F_1 \in S_t(R)$.

Poniamo $\lambda_t(x) = \lambda_t(fF) = fF_1(a)$.

## BIBLIOGRAFIA


[1] Dieudonné J., *Topics in local algebra,* Notre Dame Math. Lect., **10**, Univ. of Notre Dame Press, Indiana, 1967.

[2] Fossum M., *The divisor class group of a Krull domain,* Springer Verlag, Berlin and New York, 1973.

[3] Samuel P., *Anneaux gradués factoriels et modules réfléxifs,* Bull. Soc. Math. France, **92** (1964), 234-249.

[4] Evans E. G., Griffith P. A., *The syzygy problem,* Ann. of Math., 2, **114** (1981), 323-333.

[5] Kuhl M., *On the symmetric algebra of an ideal,* Manu. Math., **37** (1982), 49-60.

[6] Herzogv J., Simis A., Vasconcelos W. V., *Appoximation complexes of Blowing up rings,* J. of Algebra, **74** (1982), 466-493.

[7] Herzogv J., Simis A., Vasconcelos W. V., *On the arithmetic and homology of algebras of linear type,* Trans. Ann. Math. Society, **283**, N. 2 (1984) , 661-683.

[8] Restuccia G., *Algèbres symétrique et de Rees d'un module*, Atti Acc. Peloritana, Messina, 1992.



*Dipartimento di Matematica*
*Università di Messina*